« On ne peut tout ce qui ne dépend que de notre volonté »

Marcel Proust

Primitives, intégrales et Calcul d'aires

Stage Intensif

Objectif BAC 2013

Programme

Application 1

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-2x+\dfrac{2}{x}-1$.

   Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{x^2}-1$ sur l'intervalle $[2;6]$.

3. Calculer l'intégrale $J=\displaystyle\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   Peut-on en déduire que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ est constante sur l'intervalle $[-2;2]$?

Application 2

Les questions sont indépendantes

1°) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x+\dfrac{2}{x^2}$

Déterminer la primitive de f prenant la valeur 2 en 1

2°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^2+3$

Déterminer toutes les primitives de g sur $\mathbb{R}$

3°) Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x)=2x\sqrt{x}$

Démontrer que $u'(x)=3\sqrt{x}$

En déduire une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de $h(x)=\sqrt{x}+3$

Application 3

Les questions sont indépendantes

1°) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 5x + \dfrac{3}{x^2}$

Déterminer la primitive de f prenant la valeur 3 en 1

2°) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 5x^2 + 2$

Déterminer toutes les primitives de g sur IR

3°) Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = 2x\sqrt{x}$

Démontrer que $u'(x) = 3\sqrt{x}$

En déduire une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de $h(x) = \sqrt{x} + 2$

Application 4

Donner dans chacun des cas suivants une primitive de f.

$f(x) = 2x + 3$	$F(x) =$
$f(x) = 3x^2 - 7x$	$F(x) =$
$f(x) = x^5$	$F(x) =$
$f(x) = \dfrac{3}{x^3}$	$F(x) =$
$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x$	$F(x) =$
$f(x) = 5 - \dfrac{7}{x^2}$	$F(x) =$
$f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$	$F(x) =$
$f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2}$	$F(x) =$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x + 1}}$	$F(x) =$
$f(x) = 5(2x + 5)^3$	$F(x) =$

Application 3

Donner, en expliquant et en citant les formules utilisées, une primitive pour chacune des fonctions :

1°) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2$

2°) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$

3°) $f(x) = 2x(4 + x^2)$

4°) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{5 - x}}$

5°) $f(x) = (1 - 3x)^5$

Application 4

Donner, en expliquant et en citant les formules utilisées, une primitive pour chacune des fonctions :

1°) $f(x) = 7x^3 - 5x^2 + 2$

2°) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

3°) $f(x) = 2x(3 + x^2)$

4°) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{3 - x}}$

5°) $f(x) = (1 - 2x)^7$

Application 5

Les trois questions sont indépendantes.

1°) Déterminer, une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants. (On expliquera si nécessaire)

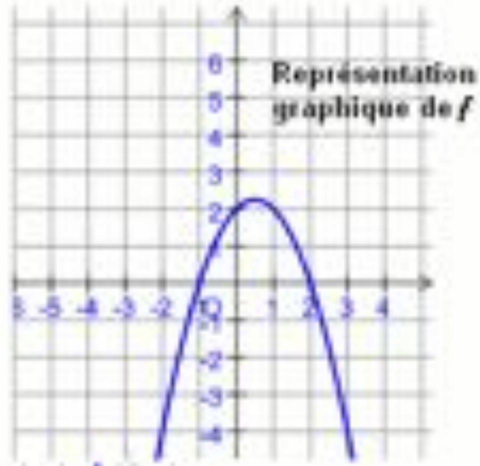
a) $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{3x - 5}{2}$

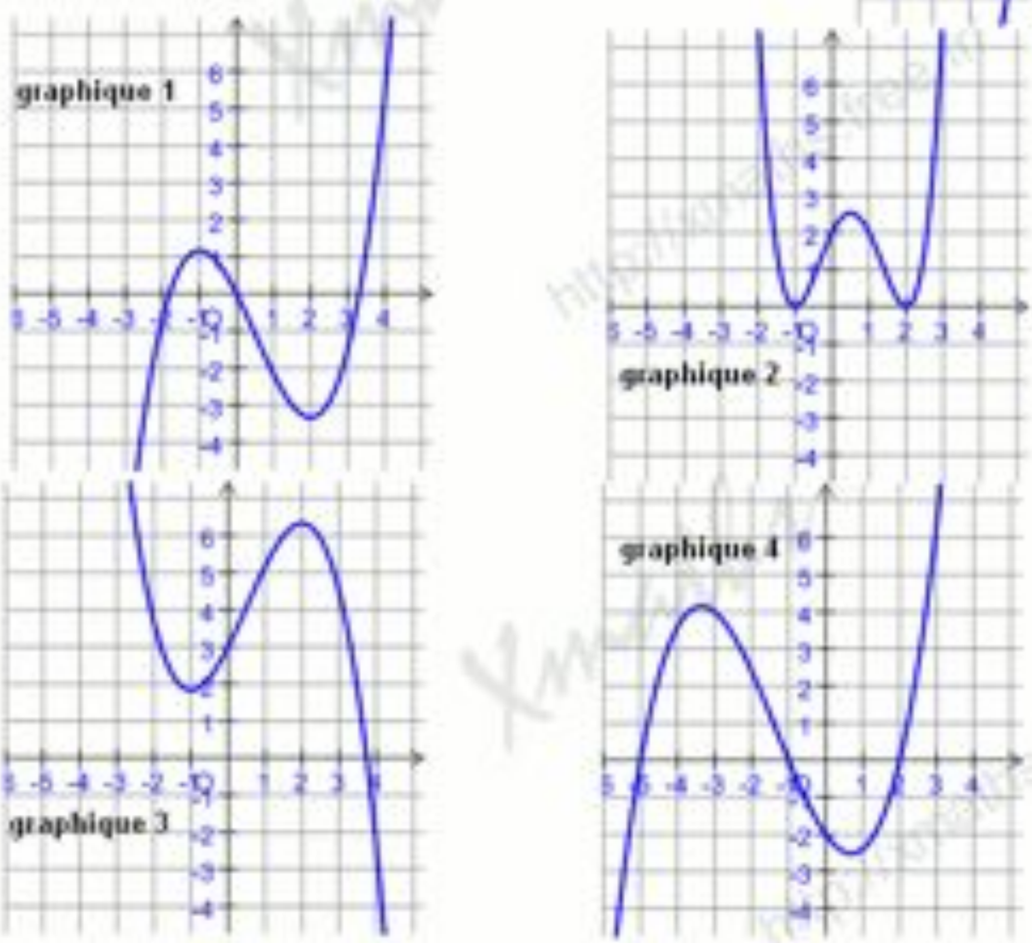
c) $f(x) = (5 - 3x)^2$ d) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

2°) Soit $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{5}{(x + 1)^2}$ Déterminer la primitive F, de f, prenant la valeur 2 en 1.

3°) La fonction f définie sur IR a la représentation graphique donnée ci-contre.

Un des quatre graphiques ci-dessous, représente une primitive F de f.
Indiquer quel est ce graphique en justifiant l'élimination des trois autres.



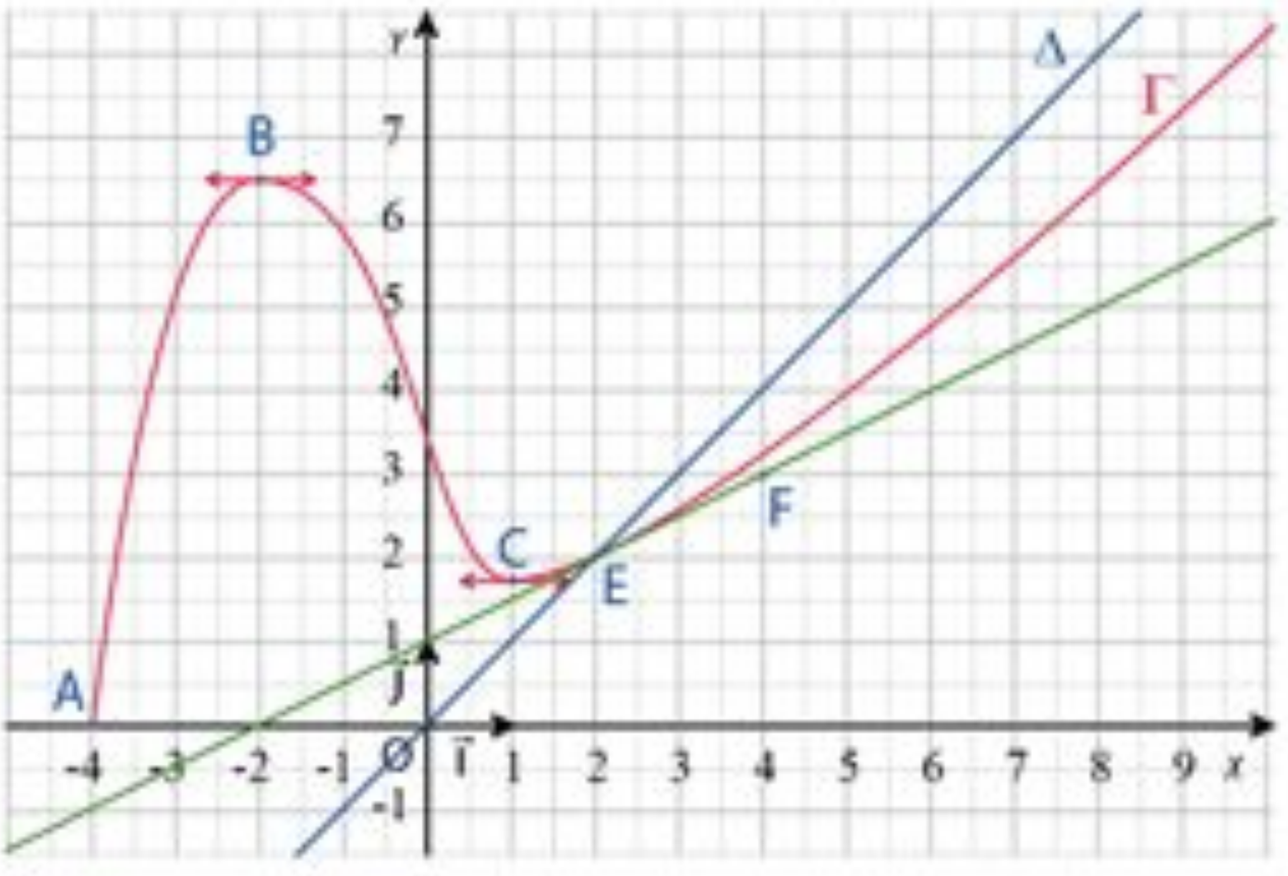


Application 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [- 4 ; 6]. On note f' sa fonction dérivée. La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2.

On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points B (-2 ; 6,5) et C(1 ; 1,75),
- la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées (4 ; 3)



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :

   a. les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$;

   b. les valeurs de x dans l'intervalle [- 4 ; 6] vérifiant $f'(x) \geq 0$;

   c. les valeurs de x dans l'intervalle [- 4 ; 6] vérifiant $f(x) \leq x$.

Application 6 suite

2. Soit g la fonction définie sur]- 4 ; 6] par $g(x) = \ln[f(x)]$. Déterminer par lecture graphique et avec justification :

   a. les variations de g ;

   b. la limite de la fonction g quand x tend vers-4.

3. **Encadrement d'une intégrale**

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

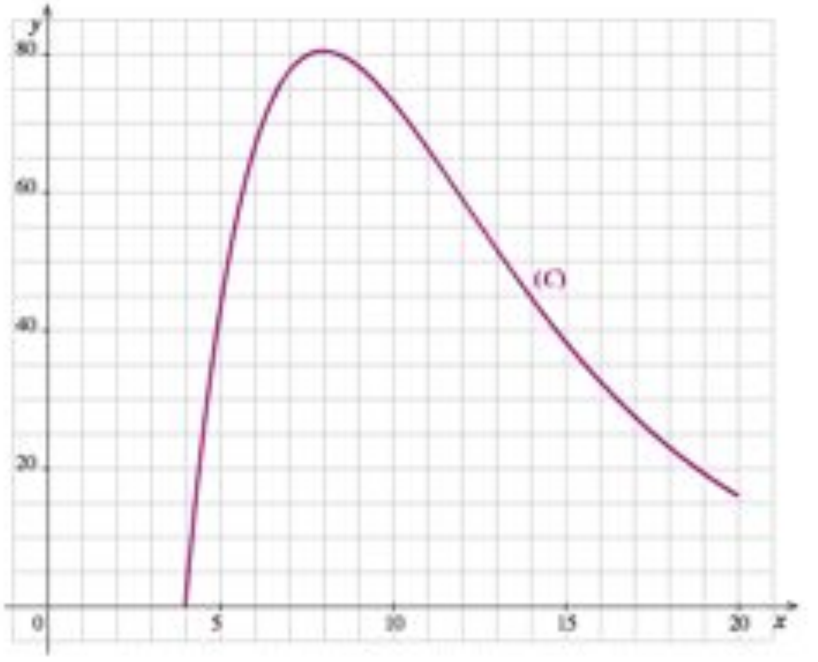
   a. Soit l'intégrale $\mathrm{I} = \int_2^4 f(x)\,dx$. Interpréter graphiquement I.

   b. Proposer un encadrement de l'intégrale I par deux nombres entiers consécutifs. Justifier.

Application 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4;20]$ par $f(x) = (x-4)e^{-0,25x+5}$.

La courbe (C) ci-dessous représente cette fonction dans un repère orthogonal.



PARTIE A :

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[4;20]$, $f'(x) = (-0,25x+2)e^{-0,25x+5}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f surl'intervalle $[4;20]$.
3. a. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -4xe^{-0,25x+5}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[4;20]$.

   b. Calculer l'intégrale $\int_4^{20} f(x)\mathrm{d}x$.

QCM LIBAN 2013

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $]0;+\infty[$, et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :

   a. x^3-3x^2+4 b. $\ln(x)$ c. $-e^x$ d. x^2+x+5

2. Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ définie par $f(x)=\ln(x)$ est la fonction F définie par :

   a. $F(x)=\dfrac{1}{x}$ b. $F(x)=x\ln(x)-x$ c. $F(x)=x\ln(x)$ d. $F(x)=\ln(x)$

3. La valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,dx$ est égale à :

   a. $3{,}19$ b. e^2-1 c. $\dfrac{1}{2}e^2$ d. $\dfrac{1}{2}\left(e^2-1\right)$

4. Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1,4)$, alors une valeur approchée au centième de $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$ est :

   a. 0,15 b. 0,09 c. 0,34 d. 0,13

5. Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaites de leur maire.
   L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la cote de popularité du maire est :

   a. $[0{,}35;0{,}75]$ b. $[0{,}40;0{,}70]$ c. $[0{,}45;0{,}65]$ d. $[0{,}50;0{,}60]$