« Si tu as réussi, je peux réussir aussi »

Les Cartons

COURS PARTICULIERS PARIS

Stage Intensif

Objectif BAC 2014

PRIMITIVES, INTEGRALES & CALCUL D'AIRES

Programme

Application 1

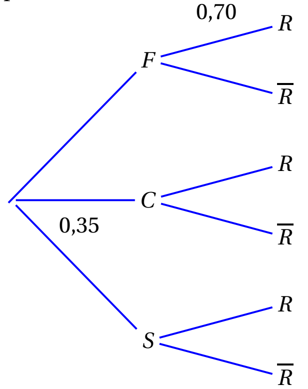
Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples.
Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.
On s'intéresse aux évènements suivants :
F : « la table est occupée par une famille »
S : « la table est occupée par une personne seule »
C : « la table est occupée par un couple »
R : « le serveur reçoit un pourboire »
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A, sachant B.

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $p(F)$ et $p_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. **a.** Calculer $P(F \cap R)$.
   b. Déterminer $P(R)$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.
On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.
Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2}.

1. Calculer :
   a. la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
   b. $p(X \geqslant 20)$.
2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros.

Application 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = x + 1 + \mathrm{e}^{-x+0,5}.$$

On a représenté **en annexe**, dans un plan muni d'un repère orthonormé :
- la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ;
- la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

1. **a.** Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, on a $f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.

   c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.

   a. Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.

   b. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

Partie B Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.
La fonction f, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

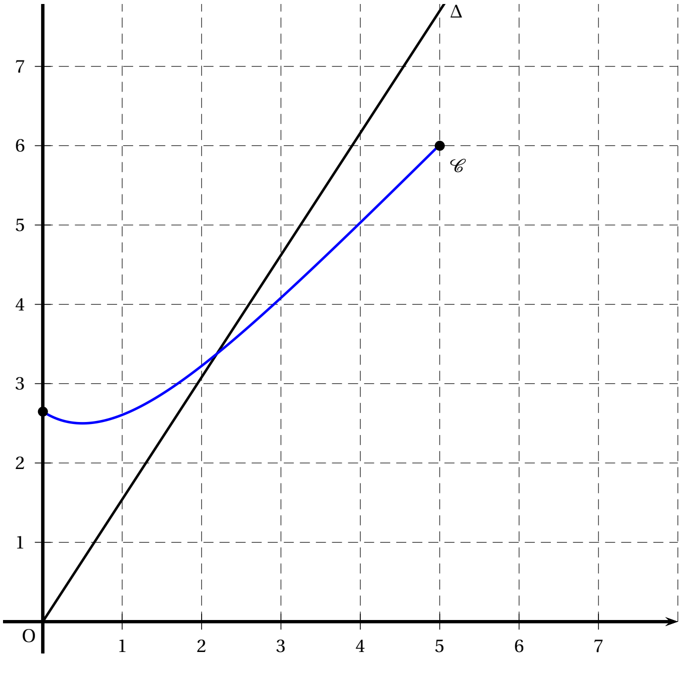
1. **a.** Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.

   b. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €.
   La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros.
   Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - \mathrm{e}^{-x+0,5}$.

2. **a.** Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

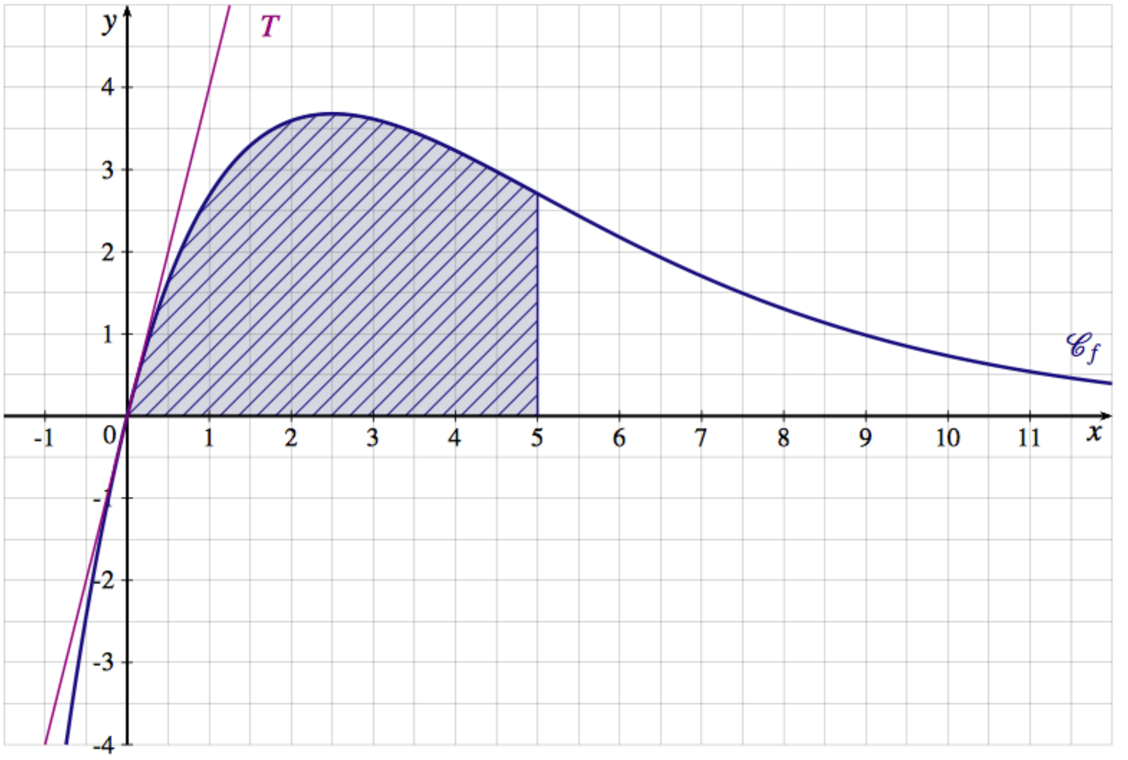
   b. Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.

3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
   Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.



Application 3

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
2. Soit F une primitive de f. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

   PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5;+\infty[$, la fonction F est croissante.

   PROPOSITION B : $F(-1) \leqslant F(0)$.

   PROPOSITION C : $12 \leqslant F(5) - F(0) \leqslant 18$.

PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-0,4x}$.

1. On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.

   a) Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} -0,4a = 4 \\ a - 0,4b = 0 \end{cases}$

   b) Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.
2. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de A.

Application 4

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right)\, \mathrm{d}x$$

$$B = \int_{2}^{6} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right)\, \mathrm{d}x$$

$$C = \int_{-2}^{1} 2\mathrm{e}^{2x+1}\, \mathrm{d}x$$

$$D = \int_{0}^{\ln 2} 2\mathrm{e}^{x} \times \left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)\, \mathrm{d}x$$

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x$$

Application 5

$f(x) = 2x + 2$	$F(x) =$
$f(x) = 3x^2 - 5x$	$F(x) =$
$f(x) = x^4$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{5}{x^3}$	$F(x) =$
$f(x) = x^3 - 7x^2 + 2x$	$F(x) =$
$f(x) = 7 - \frac{5}{x^2}$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$	$F(x) =$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x + 1}}$	$F(x) =$
$f(x) = 3(2x + 3)^3$	$F(x) =$

Application 6

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{-0,5x} + x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

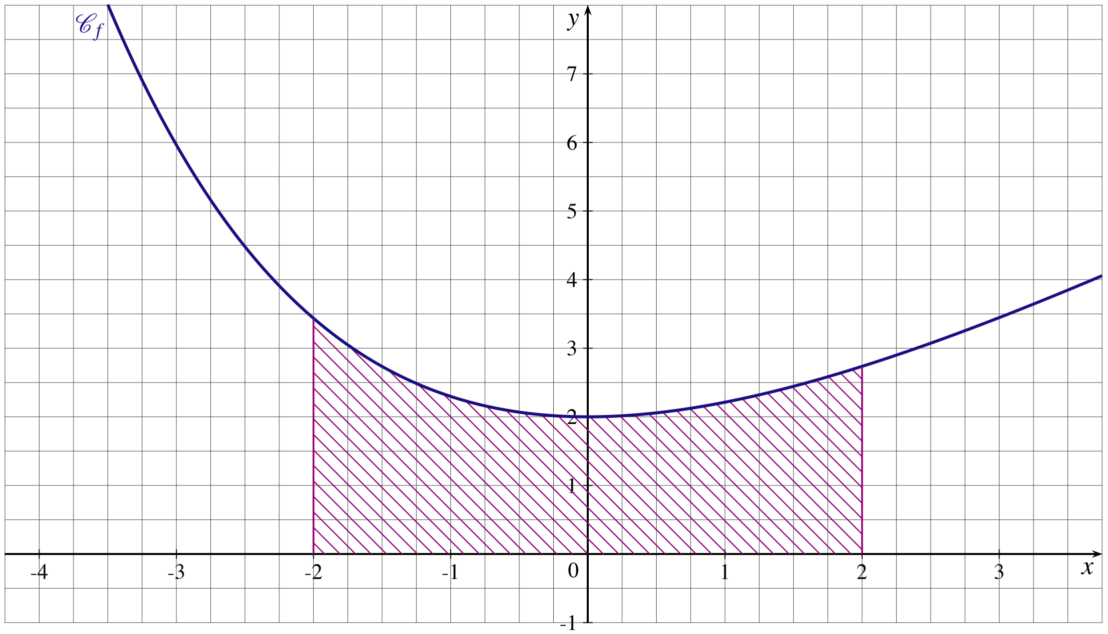
PARTIE B

On considère maintenant la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. Montrer que $F'(x) = f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction F.
3. Montrer que l'équation $F(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$, avec α appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 2]$. Donner une valeur arrondie au dixième près de α.
4. Étudier la convexité de la fonction F.
5. La courbe représentative de de la fonction F a-t-elle un point d'inflexion ?

PARTIE C

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (*unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées*).



Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire en cm^2 de la portion du plan hachurée.

Application 7

Une entreprise fabrique en grande quantité des tubes en aluminium.
La longueur des tubes est exprimée en millimètres. Un tube est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[245 ; 255]$. *Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à* 10^{-3}

PARTIE A

Dans cette partie, on considère que 5 % des tubes fabriqués ne sont pas conformes pour la longueur.
On prélève au hasard 50 tubes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tubes.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 tubes, associe le nombre de tubes qui ne sont pas conformes pour la longueur.

1. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
2. Calculer la probabilité $P(X=2)$. Interpréter le résultat.
3. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement deux tubes au moins ne sont pas conformes pour la longueur.

PARTIE B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production d'une journée, associe sa longueur.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2,5.

1. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit conforme pour la longueur.
2. Le contrôle de conformité mis en place rejette les tubes dont la longueur est inférieure à 245 millimètres.

   Quelle est la probabilité pour qu'un tube prélevé au hasard dans la production d'une journée soit rejeté par le contrôle de conformité ?

PARTIE C

Le cahier des charges établit que la proportion dans la production de 2 % de tubes refusés par le contrôle de conformité est acceptable.
On veut savoir si une machine de production est correctement réglée. Pour cela on prélève au hasard dans la production un échantillon de taille 250 dans lequel 6 tubes se révèlent être non conformes.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non conformes dans un échantillon de taille 250.
2. La machine de production doit-elle être révisée ? Justifier votre réponse.

Application 8

Sauf mention contraire, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondis à 10^{-4} *près.*

Une usine fabrique en grande quantité des lames de parquet en chêne. Les bois proviennent de deux fournisseurs A et B.

PARTIE A

Dans le stock de cette usine, 75 % des bois proviennent du fournisseur A.
On constate que 9 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur A et 13 % des lames obtenues à partir des bois du fournisseur B présentent un léger défaut qui ne justifie pas le déclassement des lames.
On prélève au hasard une lame. On considère les évènements suivants :
– A : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur A » ;
– B : « la lame prélevée est obtenue à partir de bois du fournisseur B » ;
– D : « la lame prélevée a un léger défaut ».

1. Calculer la probabilité $P(B \cap D)$.
2. Calculer la probabilité que la lame a un léger défaut.
3. Calculer la probabilité qu'une lame ayant un léger défaut provienne de bois du fournisseur A.

PARTIE B

On prélève au hasard 40 lames dans le stock, pour vérification. On admet que la probabilité qu'une lame prélevée au hasard dans ce stock ait un défaut est égale à 0,1.
Le stock est suffisamment important pour assimiler le lot de 40 lames à un tirage avec remise de 40 lames.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 40 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Interpréter le résultat.
3. Déterminer la probabilité de trouver quatre lames qui ont un défaut.
4. Déterminer la probabilité qu'au moins deux lames ont un défaut.

PARTIE C

Pour satisfaire la commande d'un client, on prélève au hasard dans le stock 400 lames.
On admet que la loi de la variable aléatoire Z qui, à tout prélèvement de 400 lames dans ce stock, associe le nombre de lames ayant un défaut peut être approchée par la loi normale de moyenne 40 et d'écart type 6.

1. Déterminer, la probabilité que dans un prélèvement de 400 lames, il y ait plus de 50 lames ayant un défaut.
2. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de lames ayant un défaut. En déduire le nombre de lames ayant un défaut que le client peut trouver avec une probabilité proche de 0,95.

PARTIE D

Le fabriquant souhaite évaluer la proportion inconnue p de clients satisfaits par son produit. Pour cela, il effectue un sondage auprès d'un échantillon de 200 clients. Sa clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage aléatoire avec remise.
Lors de ce sondage, 156 clients se sont déclarés satisfaits par son produit.

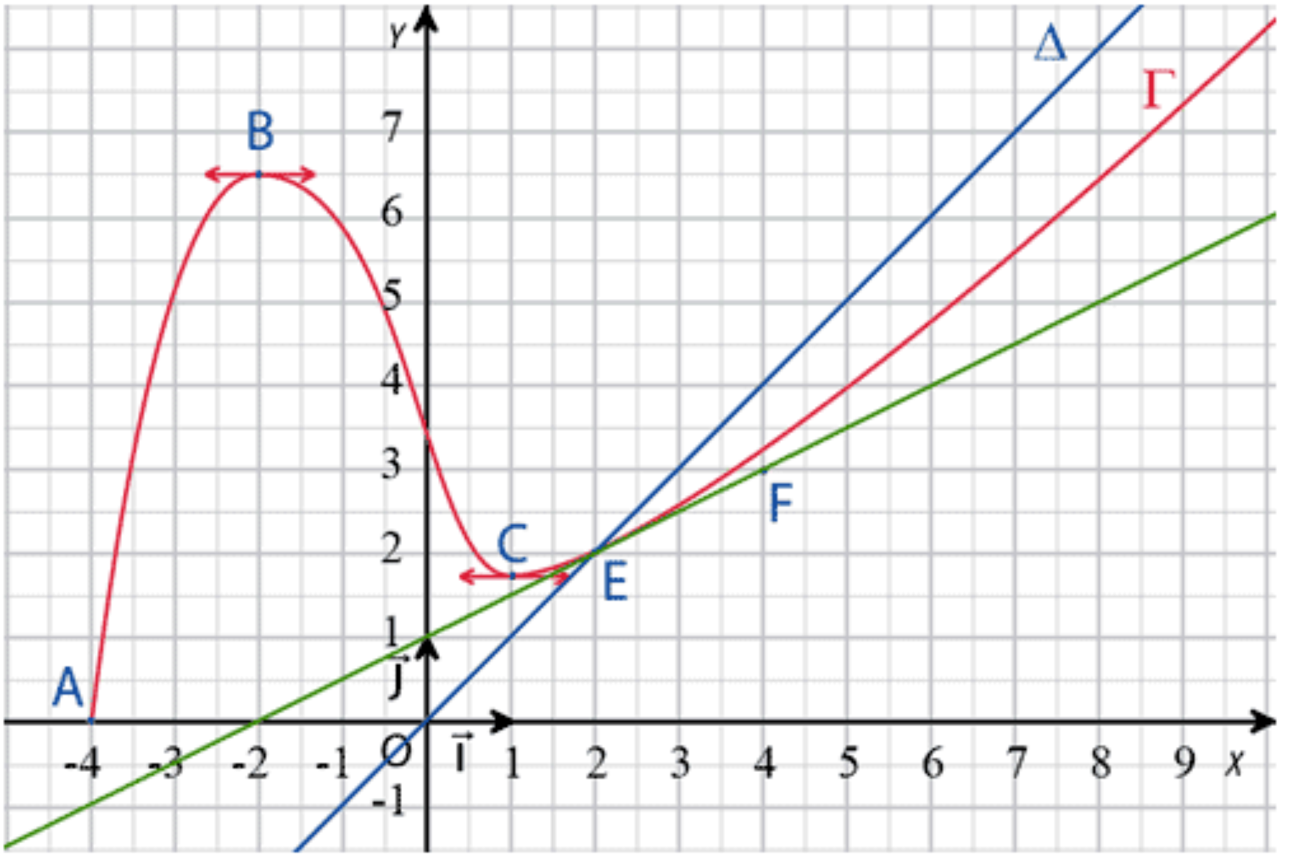
1. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion p de clients satisfaits.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p avec le coefficient de confiance 95 %. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-2}.
3. Ce fabriquant peut-il être certain que plus de 70% de sa clientèle est satisfaite par son produit ?

Application 9

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [- 4 ; 6]. On note f' sa fonction dérivée. La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée ci-dessous ainsi que la droite Δ d'équation $y=x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2.

On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points B (-2 ; 6,5) et C(1 ; 1,75),
- la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées (4 ; 3)



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :

   a. les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$;

   b. les valeurs de x dans l'intervalle [- 4 ; 6] vérifiant $f'(x) \geq 0$;

   c. les valeurs de x dans l'intervalle [- 4 ; 6] vérifiant $f(x) \leq x$.