« Une suite de petites volontés fait un gros résultat »

Charles Baudelaire

Les suites

Stage Intensif

Objectif BAC 2013

Programme

<u>Application 1</u>

Pondychérie 2013

<u>Application 2</u>

Liban 2013

<u>Application 3</u>

Amérique du Nord 2013

<u>Application 4</u>

Application

<u>Application 5</u>

Application Type BAC

<u>Application 6</u>

Application Type BAC

<u>Application 7</u>

Application Type BAC

<u>Application 8</u>

QCM LIBAN 2013 Nouveau

Application 1

Le 1[er] janvier 2000, un client a placé 3000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. On note C_n le capital du client au 1[er] janvier de l'année $2000 + n$, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation : $C_n = 3000 \times 1{,}025^n$.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3000

Traitement	Affecter à n la valeur 0. {*Initialisation*}
	Affecter à U la valeur 3000 {*Initialisation*}
	
	Tant que $U \leq S$
	    n prend la valeur $n + 1$
	    U prend la valeur $U \times 1{,}025$
	Fin tant que

Sortie	Afficher le nombre $2000 + n$

a) Pour la valeur S = 3300 saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	....	
Valeur de U	3000		....	
Condition $U \leq S$	vrai		....	

b) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3300.

c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3000.

4. Au 1[er] janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1[er] janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

Application 2

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
   - **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n.
   - **c.** En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

```
VARIABLES
a, i, n.
INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur 10
TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n,
a prend la valeur ....

SORTIE
Afficher a
```

3. **a.** Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$.

   b. En donner une interprétation.

Application 3

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
   Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

```
Variables :
    U, N
Initialisation :
    Mettre 42 dans U
    Mettre 0 dans N
Traitement :
    Tant que U < 100
        U prend la valeur U × 0,95 + 6
        N prend la valeur N + 1
    Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0,95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
   On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et préciser son premier terme w_0.
3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38 \times (0,95)^n$.
   a. Déterminer la limite de (w_n).
   b. En déduire la limite de (v_n).
   c. Interpréter ce résultat.

Application 4

Calculer les limites des suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}\,;\; v_n = \frac{2^{2n}}{3^{n+1}}\,;\; w_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Calculer la raison positive q d'une suite géométrique (u_n) sachant que : $u_1 = 8$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = 10.$

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 0$, par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$ et (S_n) la suite définie par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

Calculer S_1 et S_2 puis la limite de la suite (S_n).

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 0$, par $u_n = \dfrac{3}{2^{n+1}}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique : on donnera son 1[er] terme et sa raison q.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Calculer la somme $R = u_5 + u_6 + \ldots + u_{36}$.
3. Déterminer la limite de la suite (S_n) définie par $S_n = u_5 + u_6 + \ldots + u_n$.

Application 5

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite u où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année (2010 + n).

En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et, pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1} = 0{,}95\ u_n + 3$.

2. On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   a) Montrer que la suite v est une suite géométrique de raison 0,95.
   b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times (0{,}95)^n$.

3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

4. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité
   $u_{n+1} - u_n = 0{,}5 \times (0{,}95)^n$.
   b) En déduire la monotonie de la suite.

5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.

6. Déterminer la limite de la suite u. Donner une interprétation du résultat.

Application 6

Monsieur Magot a placé 2 000 € le 31 décembre 2012 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.

On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année (2013 + n), où n est un entier naturel. Ainsi, on a : $C_0 = 2\,000$.

1 a) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2014.

b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.

2 Pour tout entier naturel n on pose : $u_n = C_n + 20\ 000$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$C_n = 22\ 000 \times (1{,}035)^n - 20\ 000$.

d) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2018 (on arrondira le résultat à l'euro près).

3 Le premier janvier 2018, Monsieur Magot retirera alors le capital disponible de la banque pour financer un voyage dont le coût (supposé fixe) est de 6 000 €. Il paiera cette somme en 4 mensualités qui seront 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 800 €.

Calculer le montant de chacune de ces 4 mensualités.

Application 7

Un salarié remarque qu'il lui reste, chaque mois, 500 euros de son salaire mensuel.

Il décide donc, en 2012, de réaliser une épargne "prudente" de la façon suivante :

- Le 28 de chaque mois, il verse 50 % du solde de son compte courant sur un plan d'épargne.
- Le solde du compte courant est nul le 28 décembre 2011.
- Le 28 janvier 2012, le solde de son compte courant est : $S_1 = 500$ €; il verse donc la somme $e_1 = 250$€ sur son plan d'épargne et laisse 250 € sur son compte courant.
- Le 28 février 2012, le solde S_2 est égal à 750 € : c'est-à-dire 250 € restant, plus 500 € d'économies mensuelles. Il verse donc $e_2 = 375$€ sur son plan d'épargne.

1. Calculer e_3 et e_4, versements respectifs de son compte courant à son plan d'épargne le 28 mars et le 28 avril.

2. On désigne par e_n le montant théorique du versement du compte courant au plan d'épargne le 28 du n-ième mois qui suit le mois de décembre 2011.

On a donc $e_{n+1} = 0{,}5 \times (e_n + 500)$.

Pour tout nombre entier naturel n non nul, on définit la suite v par $v_n = 500 - e_n$.

a) Démontrer que la suite v est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = 250$.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c) Calculer $S = v_1 + v_2 + \dots\dots + v_{12}$.

3. a) Exprimer e_n en fonction de n.

b) Trouver le montant C de la somme capitalisée sur le plan d'épargne au 29 décembre 2012.